Chapitre 6

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

6.1 Coordonnées locales

6.1.1 DÉFINITION

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ des fonctions de classe C^1.

Soit $a \in U$. On dit que $(f_1, \ldots, f_n)$ est un **système de coordonnées locales au voisinage de** a s'il existe un voisinage $U_a \subset U$, telle que l'application $f|_{U_a} : U_a \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est un difféomorphisme de U_a sur son image $f(U_a)$.

Le théorème d'inversion locale s'énonce comme suit :

6.1.2 THÉORÈME

$(f_1, \ldots, f_n)$ est un système de coordonnées locales au voisinage de a si et seulement si le système de formes linéaires $(Df_1(a), \ldots, Df_n(a))$ forme une base du dual de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration: En effet, la condition $(Df_1(a), \ldots, Df_n(a))$ forme une base du dual de $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $Df(a)$ est inversible.

6.1.4 DÉFINITION (SUBMERSION)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, tels que $n \geq p$.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_p) : U \to \mathbb{R}^p$, une application de classe C^1, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est une **submersion** si pour tout $x \in U$, $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est surjective.

Dans ce cas on dit que les composantes $f_1, \ldots, f_p$ de f sont des fonctions indépendantes

---

6.1.5 REMARQUE. 1. La condition $Df(x)$ surjective est équivalentes à : les formes linéaires $Df_1(x), \dots, Df_p(x)$ sont linéairement indépendantes. C'est aussi équivalent au rang de la matrice jacobienne de f est égale à p, $\mathrm{rg}(J_f(x)) = p$.

2. Si $p = 1$, f est une submersion en $a \Leftrightarrow Df(a)$ est non nulle $\Leftrightarrow$ pour tout produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, grad $f(a) \neq 0$.

3. Si $Df(a)$ est surjective, alors il existe un voisinage ouvert de a, U_a tel que $\forall x \in U_a$, $Df(x)$ est surjective c-à-d que $\forall x \in U_a$, le rang de la matrice jacobienne $J_f(x)$ est égale à p, En effet, dire que $\mathrm{rg}(J_f(a)) = p$, c'est équivalent à dire que $J_f(a)$ contient un mineur $p \times p$, $A_p(a) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, tel que $\det A_p(a) \neq 0$. Comme, f est de classe C^1, les coefficients de $J_f(x)$, et en particulier ceux de $A_p(x)$, sont des fonctions continues en x, par suite le déterminant $\det A_p(x)$, qui est un polynôme en les coefficients, est une fonction continue en x. D'où $\det A_p(a) \neq 0$, entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U_a de a, tel que $\forall x \in U_a$, $\det A_p(x) \neq 0$.

6.1.6 PROPOSITION

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, tels que $n \geq p$.

Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : U \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ une application de classe C^1, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'application f est une submersion si et seulement si pour tout $a \in U$, il existe $n - p$ formes linéaires $l_{p+1}, \dots, l_n$ telles que $(f_1, \dots, f_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$ est unsytème de coordonées locales au voisinage de a, c-à-d qu'il existe un ouvert $U_a \subset U$, voisinage de a, tel que $H : U_a \to \mathbb{R}^n$ definie par

$H(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x), l_{p+1}(x), \dots, l_n(x))$ est un difféomorphisme de U_a sur sont image $H(U_a)$.

Démonstration: Par hypothèse les forme linéaires $Df_1(a), \dots, Df_p(a)$ sont linéairements indépendantes. Par le théorème de la base incomplète, on peut choisir, $n - p$ formes linéaires, $l_{p+1}, \dots, l_n$, telles que le système

$$(Df_1(a), \dots, Df_p(a), l_{p+1}, \dots, l_n)$$

soit une base du dual de $\mathbb{R}^n$. Comme les l_j sont leurs propres différentielles, il résulte du théorème 6.1.2, que H est un difféomorphisme locale. ■

6.1.8 DÉFINITION (SOUS-VARIÉTÉ)

On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de dimension k et de classe C^r** de $\mathbb{R}^n$, si pour tout $a \in S$, il existe un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et une application de classe C^r, $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$ tels que :

(1) $S \cap U_a = \{x \in U_a | f_i(x) = 0, i = 1, \dots, n-k\}$

(2) L'application f est une submersion c-à-d pour tout $x \in U_a$, la différentielle $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ est surjective.

L'application f est appelée "équation locale" de S au voisinage de a.

En d'autres termes, une sous-variété est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui admet au voisinage de chacun de ses points un système d'équations qui satisfait les hypothèses du théorème des fonctions implicites. On dit que $f_1 = \ldots = f_{n-k} = 0$ sont des équations locales de S en a.

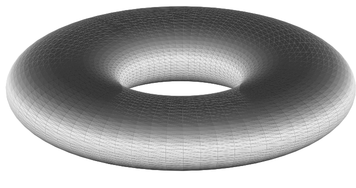
On parle de courbe si la dimension $k = 1$, de surface si $k = 2$ et d'hypersurface si $k = n - 1$.

6.1.9 REMARQUE.

1. On notera que la définition de sous-variété implique que la partie vide est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension comprise entre 0 et n.
2. Souvent, une seule application suffit à décrire une sous-variété.(voir les exemples qui suivent)
3. Une sous-variété est "localement fermée" : en effet en un point $a \in S$, $U_a \cap S = f^{-1}(0)$ est un fermé.
4. Dans la condition (2) de la définition, il suffirait de supposer que $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjective, car alors $Df(x)$ sera surjective dans un voisinage de a, que l'on pourra substituer à U_a. (voir la remarque après la proposition 6.1.6)

6.1.10 EXEMPLE.

1. Un sous-espace vectoriel de dimensoion k de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe C^∞ (le démontrer)
2. Les ensembles "contraintes", rencontrés dans le paragraphe sur les extrema liés, sont des sous-variétés.
3. Le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension 1 et de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout point $(a,b) \in \mathbb{S}^1$, en peut prendre $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. La condition (1) est satisfaite par définition de $\mathbb{S}^1$ et $Df(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ donne la condition (2).
4. Plus généralement, la sphère $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension $n-1$ et de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$.
   En effet, son équation est $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$, dont la différentielle $Df(x_1, \ldots, x_n) = 2(x_1, \ldots, x_n)$, est surjective en tout point de $\mathbb{S}^{n-1}$.
5. Le tore $\mathbb{T}^2$ est la surface de $\mathbb{R}^3$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe Oz, un cercle centré en $(0, R, 0)$ et de rayon r du plan yOz, avec $r < R$.
   Il a pour équation $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$. On vérifie que $Df(x,y,z) \neq (0,0,0)$ en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{T}^2$. Donc $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et de classe C^∞.
6. Soit R et r deux réelles > 0. On considére le sous-ensemble de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2 \; et \; x^2 + z^2 = r^2\}$. (c'est l'intersection de deux cylindres)
   On définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - R^2, x^2 + z^2 - r^2)$.



Alors : $V = f^{-1}(0,0)$ et $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$.

Les déterminants des mineurs d'ordre 2 de $Df(x,y,z)$ sont xy, xz et yz. Pour qu'ils soient tous les trois nuls, il faut et il suffit que $x = y = 0$ ou $x = z = 0$ ou $y = z = 0$. Donc pour $(x,y,z) \in V$, $Df(x,y,z)$ n'est pas surjective si et seulement si $x^2 = R^2$ et $x^2 = r^2$.

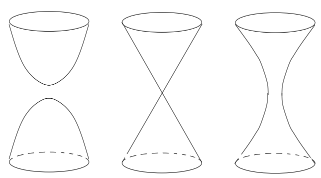
Finalement, V est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 si et seulement si $R \neq r$.

7. Le sous-ensemble $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété . La différentielle de $(x,y) \mapsto xy$ s'annule en $(0,0)$. Mais, cela ne suffit pas pour conclure que V n'est pas une sous-variété.

   Supposons que $V \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\}$ avec U est un ouvert voisinage de $(0,0)$.

   Alors, $f|_{Ox\cap U} = f|_{Oy\cap U} \equiv 0$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc $Df(0,0)$ n'est pas surjective. On a montrer qu'il est impossible de trouver une équation locale de V en $(0,0)$ dont la différentielle en $(0,0)$ soit surjective. Donc V n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. On pose $S_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y,z) = t\}$. La figure suivante montre que S_t est une sous-variété (de dimension 2) si et seulement si $t \neq 0$. (exercice)



La proposition suivante donne d'autres critères pour identifier une sous-variétés

6.1.11 Proposition

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) S est une sous-variété de dimension k et de classe C^r.

(2) Pour tout $a \in S$, il existe un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme de classe C^r, $H : U_a \to H(U_a) \subset \mathbb{R}^n$ tels que :

$$H(S \cap U_a) = H(U_a) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}\right).$$

(On dira que H est un difféomorphisme linéarisant S au voisinage de a)

Démonstration: (1) $\Rightarrow$ (2) application de la proposition 6.1.6

(2) $\Rightarrow$ (1) on pose $f_i(x) = H_{k+i}(x)$ pour $i = 1, \ldots, n-k$, où H_j est la j^{eme} composante de H et $f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$.■

6.1.13 REMARQUE. Avec cette nouvelle description des sous-variétés nous allons explorer les cas extrêmes pour la dimension de S.

1. Si la dimension de S est égale à n : alors pour tout $a \in S$, $H(S \cap U_a) = H(U_a)$, donc $S \cap U_a = U_a$ c-à-d que S est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donc, les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$, sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$.
2. Si la dimension de S est égale à 0 : alors pour tout $a \in S$, $H(S \cap U_a) = H(U_a) \cap (\{0\}^n) = \{0\}$, donc $S \cap U_a = H^{-1}(\{0\}) = \{a\}$, c-à-d que $\{a\}$ est un point isolé de S. Donc, les sous-variétés de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$, sont les parties discrètes de $\mathbb{R}^n$.
3. Le théorème des fonctions implicites voir la démonstration du théorème 5.0.24, nous donne un autre critère : pour tout $a \in S$ il existe une application de classe C^r, $h : U \to \mathbb{R}^n$, définie par $h(x) = (x, \varphi(x))$, qui est une bijection d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^k$ sur $S \cap U_a$. On dit que h est une **paramétrisation locale** de S au voisinage de a.

6.1.14 Exercice Soit $g : V \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^r. Le graphe de g est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ defini par $S = \{(x,y) \in V \times \mathbb{R}^p | g(x) = y\}$.

Montrer que S est sous-variété de dimension n et de classe C^r.

plu précisement, montrer que l'application $H : V \times \mathbb{R}^p \to V \times \mathbb{R}^p$ définie par $H(x,y) = (x, y - g(x))$ est un difféomorphisme linéarisant S.

6.1.15 Exercice Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe C^r, $r \geq 1$.

Soit S une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe $C^{r'}$, $r' \leq r$.

Montrer que $g(S)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe $C^{r'}$.

6.1.16 Exercice Soit S (respectivement S') une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe C^r (respectivement une sous-variété de $\mathbb{R}^{n'}$ de dimension k' et de classe $C^{r'}$).

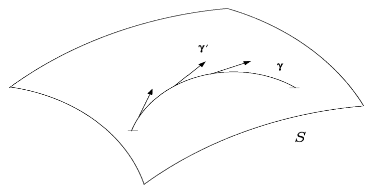
Montrer que $S \times S'$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+n'}$ de dimension $k + k'$ et de classe C^l où $l = \min\{r, r'\}$.

6.2 Espace tangent

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^r.

6.2.1 DÉFINITION

Soit $a \in S$. On note $C_a(S)$ l'ensemble des arcs paramétrés de classe C^1, tracés sur S et passant par a, c-à-d les applications de classe C^1, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$, telles que $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset S$ et $\gamma(0) = a$.



6.2.2 Définition

L'espace tangent en a **à** S est l'ensemble des vecteurs dérivés $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$ des arcs tracés sur S et passant par a :

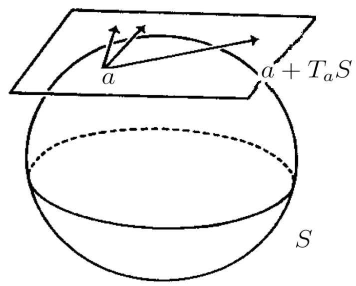
$$T_aS := \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n | \gamma \in C_a(S)\}$$

6.2.3 Proposition

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^r et $a \in S$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$ une équation locale de S au voisinage de a.

Alors :

$$T_aS = \{v \in \mathbb{R}^n | Df(a)v = 0\} = KerDf(a).$$



6.2.4 Remarque.

$KerDf(a) = \cap_{i=1}^{n-k} KerDf_i(a)$.

Démonstration: Soit $v \in T_aS$, alors par définition, il existe un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$, tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Alors, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f \circ \gamma(t) = 0$, d'où $0 = Df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = Df(a)v$, donc $v \in KerDf(a)$.

Réciproquement, soit $v \in KerDf(a)$, on doit trouver un arc γ tracé sur S tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

D'après 6.1.6, il existe k formes linéaires, $l_{n-k+1}, \ldots, l_n$, et un voisinage de a ouvert, V_a telles que l'application $H : V_a \to \mathbb{R}^n$,

$H(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x), l_{p+1}(x), \ldots, l_n(x))$ soit un difféomorphisme. On pose $b = H(a)$ et $w = DH(a)v$ et on definit, $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$, par $\sigma(t) = b + tw$, où on a choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\sigma(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ soit inclu dans l'ouvert $H(V_a)$.

On remarquera, que $f(a) = 0$ entraîne que $b = H(a) \in \{0\}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ et que $v \in KerDf(a)$ entraîne que $w = DH(a)v \in \{0\}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$; par suite pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\sigma(t) \in \{0\}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$.

On définit alors, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ par $\gamma(t) = H^{-1}(\sigma(t)) = H^{-1}(b + tw)$.

On a alors, $\gamma(0) = H^{-1}(b) = a$, $\gamma'(0) = DH^{-1}(b)\sigma'(0) = DH^{-1}(b)w = v$ et comme $H(S \cap U_a) = H(U_a) \cap \left(\{0\}^{n-k} \times \mathbb{R}^k\right)$, on aura $\gamma(t) = H^{-1}(\sigma(t)) \in H^{-1}\left(H(U_a) \cap \{0\}^{n-k} \times \mathbb{R}^k\right) = S \cap U_a$. ■

6.2.6 Corollaire

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^r et $a \in S$. Alors T_aS est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

Démonstration: En effet, $KerDf(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\dim KerDf(a) = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rg} Df(a) = n - (n-k) = k$.■

Voici les différentes expressions de l'espace tangent, en fonction de la représentation locale de la sous-variété :

6.2.8 Théorème

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^r et $a \in S$.

1. Si $S \cap U_a = f^{-1}(0)$, où f est une submersion de U_a dans $\mathbb{R}^{n-k}$, alors
$$T_aS = Ker(Df(a))$$
2. Si $g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, est une paramétrisation locale de $S \cap U_a$ au voisinage de a, c-à-d, $g(V) = S \cap U_a$, $g(a') = a$, et $Dg(a') : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injective, alors
$$T_aS = Dg(a')(\mathbb{R}^k)$$
3. Si $H : U_a \to V$ est un difféomorphisme tel que $H(S \cap U_a) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, alors
$$T_aS = (DH(a))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

Démonstration:
1. c'est la proposition 6.2.3.
2. Comme $f \circ g \equiv 0$, on aura $ImDg(a') \subset KerDf(a)$, comme $Dg(a')$ est injective, le rang de $Dg(a') = k$, donc $\dim ImDg(a') = \dim KerDf(a)$ d'où $ImDh(a') = KerDf(a)T_aS$.
Soit γ un arc tracé sur V tel que $\gamma(0) = a'$ et $\gamma'(0) = v$. Alors $g \circ \gamma$ est un arc tracé sur $S \cap U_a$ tel que $g \circ \gamma(0) = a$ et $dg(a')(\gamma'(0)) = Dg(a)(v) \in T_aS$. D'où $Dg(a')(\mathbb{R}^k) \subset T_aS$, et sont donc égaux car $\dim Dg(a')(\mathbb{R}^k) = k = \dim T_aS$.

3. Comme $H(S \cap U_a) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, est un ouvert de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, alors $T_{H(a)} H(S \cap U_a) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.
   D'autre part, H est un difféomorphisme alors, l'image par H de tout arc γ tracé sur $S \cap U_a$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ est un arc $H \circ \gamma$ tracé sur $H(S \cap U_a)$ tel que $H \circ \gamma(0) = H(a)$ et $DH(a) \circ \gamma'(0) = DH(a)(v)$ et inversement. D'où $T_a S = (DH(a))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.■

6.2.10 REMARQUE. 1. Puisque $f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon(x-a)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x-a) = 0$, et que f est une équation locale de S en a, on voit que près de a, la sous-variété S est approchée par $\{x \in \mathbb{R}^n | Df(a)(x-a) = 0\}$, qui est le translaté de $T_a S$ par le vecteur a.

2. Pour calculer $T_a S$, on peut aussi utiliser la description par les arcs paramétrés, il suffit alors de trouver, k arcs γ_j, tels que les $\gamma'_j(0)$ soient linéairement indépendants. Le sous-espace engendré par ces vecteurs sera $T_a S$.

6.2.11 EXEMPLE. 1. Calculer l'espace tangent à la sphère $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.
   On a déja vu que $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(0)$ et $Df(x) = 2(x_1, \ldots, x_n)$ est une submersion en tout point $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Alors

$$T_x \mathbb{S}^{n-1} = Ker Df(x) = \{v \in \mathbb{R}^n | < 2x, v >= 0\} = \{x\}^{\perp}$$

   C'est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$, orthogonal à x.

2. la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété de dimension 2. (voir ce qui précède).
   On va produire une paramétrisation locale de $\mathbb{S}^2$, par exemple en un point $a = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 < 0$.
   Au voisinage de a, la coordonnée $z < 0$, d'où il existe un voisinage de a dans $\mathbb{S}^2$, tel que $(x, y, z) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$.
   En fait, une telle description est valable au voisinage de tout point dont la 3^{eme} coordonnée est < 0.
   Soit $V = \mathbb{R}^2$ et $g : V \to \mathbb{R}^3$, définie par $g(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Alors, g ezst une paramétrisation locale de $\mathbb{S}^2$ au voisinage de tout point $a = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^3$, tel que $z_0 < 0$.
   En effet, $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \cap U$, avec $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$, $g(x_0, y_0) = a$ et
   $J_g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} & \frac{y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}} \end{pmatrix}$ est injective.

6.2.12 PROPOSITION
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^r, $r \geq 1$ et $a \in S$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Si $f|_S$, la restriction de f à S, présente un **extremum** au point a alors :

$$Df(a)|_{T_a S} = 0.$$

Démonstration: Soit $g : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$ une équation locale de S en a. D'après, 5.0.24 $Df(a) = L \circ Dg(a)$ pour un certain $L \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Comme $T_aS = KerDg(a)$, pour tout $v \in T_aS$, $Df(a)v = L \circ Dg(a)v = 0$ c-à-d $T_aS \subset KerDf(a)$ ou en d'autres termes $Df(a)|_{T_aS} = 0$.■

6.2.14 DÉFINITION
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k et de classe C^1 et $a \in S$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'un point $a \in S$ est un **point critique** de $f|_S$, si $Df(a)|_{T_aS} \equiv 0$.

6.2.15 REMARQUE. La nature du point critique peut être étudiée avec la méthode du théorème 5.0.31, en étudiant la restriction de la forme quadratique $Q(v)$ à l'espace tangent T_aS.

6.2.16 Exercice Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, telle que la forme bilinéaire assocée $x \in \mathbb{R}^n \mapsto < Ax, x >$ soit une forme bilinéaire définie positive. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

On pose $S = \{x \in \mathbb{R}^n | < Ax, x > + < b, x > +c = 0\}$

On définit le discriminant par $\Delta =< A^{-1}b, b > -4c$.

1. Montrer que si $\Delta < 0$, S est une vide, si $\Delta = 0$, $S = \{-\frac{1}{2}A^{-1}b\}$ et si $\Delta > 0$ S est une sous-variété (non-vide) de dimension $(n-1)$ de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $T_xS = \{v \in \mathbb{R}^n | < 2Ax + b, v >= 0\}$.

6.2.17 Exercice Soit $n \geq 1$ et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $\{M \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tM.M = I\}$ des matrices orthogonales.

a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

b) Montrer que l'espace tangent en l'identité I à $O_n(\mathbb{R})$, $T_IO_n(\mathbb{R})$ est égal à $\{M \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tM = -M)\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Réponse :

a) L'ensemble des matrices symétriques, $S_n(\mathbb{R})$, est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, identifiée au sous-espace $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, donc une sous-variété de classe C^∞ et de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

L'application $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ définie par $F(M) = {}^tMM =$ est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc de classe C^∞, et sa différentielle en M est donnée par :
$DF(M)H = \lim_{t\to 0} \frac{F(M+tH)-F(M)}{t} = {}^tMH + {}^tHM$, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $DF(M)$ est surjective : en effet, soit B une matrice symétrique ; alors si $H = \frac{1}{2}MB$ on aura
$DF(M)H = \frac{1}{2}{}^tMMB + \frac{1}{2}{}^tB{}^tMM = B$. Donc $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(I)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension : $\dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ soit $\frac{n(n-1)}{2}$.

b) $O_n = F^{-1}(I)$, alors $T_M O_n(\mathbb{R}) = Ker(DF(M))$, en particulier si $M = I$, $T_I O_n(\mathbb{R}) = Ker(DF(I)) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) | {}^t M + M = 0\}$.